СВЯЗЬ И ИНФОРМАТИЗАЦИЯ

COMMUNICATION AND INFORMATIZATION

Оптимизация сетевого графика комплекса работ в Excel

Optimization of Network Schedule of Set of Operations in Excel

УДК 330.101

Н. В. Катаргин, Финансовый университет при Правительстве РФ (Россия, Москва)

N. V. Katargin, Financial University under the Government of Russian Federation (Russia, Moscow)

Предлагается методика оптимизации сетевого графика по времени и числу работников с использованием сервиса Excel и методика построения плотности распределения времени окончания проекта методом Монте-Карло с Visual Basic при любом распределении вероятностей времени выполнения работ.

Ключевые слова: *сетевой график, оптимизация плана, Excel, VBA, стохастический процесс, метод Монте-Карло.*

The method of optimization of the network schedule by time and number of employees using the Excel service and the method of building the density of the distribution of the project end time by Monte Carlo with Visual Basic method at any distribution of the probabilities of the work time are proposed.

Keywords: *network, optimization, plan, Excel, VBA, stochastic process, method Monte-Carlo.*

Введение

Задача сетевого планирования — построение рационального плана проведения сложного комплекса работ (операций), при котором выполнение некоторых работ нельзя начать раньше, чем будут завершены другие, опорные работы. Под оптимизацией понимается сокращение затрат, срока завершения проекта и/или сокращение количества работников (или единиц техники), занятых в проекте, путем перераспределения ресурсов и работников. Предполагается, что время выполнения каждой работы уменьшается при увеличении ресурсов (денег) или числа работников. Во всех учебниках предлагается пошаговое перераспределение ресурсов с целью сокращения критического пути, т. е. времени завершения проекта [1—3]. В данной работе предложен принципиально новый подход к оптимизации по времени и работникам, основанный на использовании сервиса *Поиск решения* Excel, который использует итерационную градиентную процедуру (метод Ньютона, ОПГ) или же эволюционный (генетический алгоритм). В результате все пути становятся одинаковыми или почти одинаковыми. Время выполнения работы — случайная величина, как и время выполнения всего проекта, с распределением вероятностей, возможно отличающемся от нормального

(Гаусса). Если все пути одинаковы, невозможно применить традиционные статистические методы и требуется метод Монте-Карло. В данной работе он реализован в среде Visual Basic for Applications (Excel).

Оптимизация Время/Стоимость

На рисунке 1 приведён пример сетевого графика, соответствующего выполнению некоего проекта.

Обычно оптимизацию плана комплекса работ проводят после нахождения критических работ, напряжённостей работ и ресурсов, которые можно перебросить с некритических работ на критические. В данном случае критический путь ***1 => 4 => 6 => 7 => 10***, соответственно, новое время выполнения комплекса работ *t(X),* где *X* — дополнительные ресурсы:

$$t_{крит.}(X) = t_1(X + t_4(X) + +t_6(X) + t_7(X) + t_{10}(X). \quad (1)$$

Предполагается, что время выполнения работ можно сократить, вкладывая дополнительные ресурсы, причём сокращение времени пропорционально дополнительным ресурсам ***X***:

$$t(X)= t_0 - bX. \quad (2)$$

Под ресурсами можно понимать деньги, людей, технику. На рисунке 2 видно, что используемая линейная зависимость время/затраты справедлива в некотором диапазоне; существует асимптота слева (затраты, при которых работа никогда не будет сделана) и справа (минимальное время выполнения работы при любых затратах).

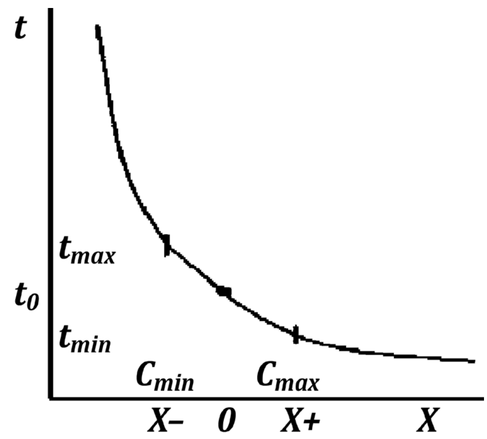

Рис. 2. Зависимость времени работы от дополнительных затрат

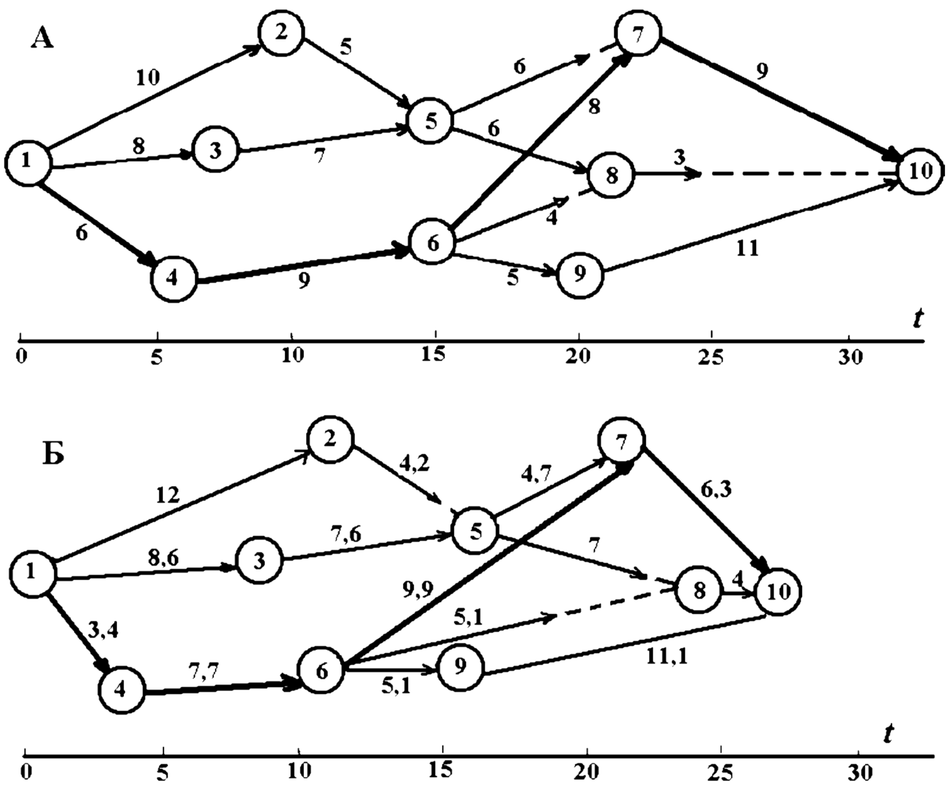

Рис. 1. Сетевой график до (А) и после оптимизации по времени (Б)

Ограничения дополнительных затрат обозначены ***X–*** (сколько можно вычесть) и ***X+*** (сколько можно добавить). Эти величины могут отличаться по модулю. Можно ввести ограничения по времени выполнения работ, но они будут пропорциональны дополнительным затратам. Величины C_{min} и C_{max} — полные стоимости работ для обеспечения их выполнения за максимальное t_{max} и минимальное время t_{min} соответственно.

Дополнительные ресурсы можно привлечь извне, а можно перераспределить внутри проекта, перебросив с работ, имеющих резервы времени на выполнение, на критические.

В данной работе предлагается оптимизация сетевого графика, основанная на использовании итерационной градиентной процедуры, включённой в сервис *Поиск решения (Solver)* электронных таблиц Excel. Исходные данные, соответствующие сетевому графику (рис. 1, А), и расчётные формулы размещаются в таблице 1. ***t(X) работ*** вычисляется по формуле (2), в данном примере ***b = 0,1***. Без дополнительных затрат $t_{крит}$ ***= 32***. Целевая функция $t_{крит}$, её надо минимизировать, изменяя ячейки вектора **X**. Ограничения: ***X ≥ X– , X ≤ X+,*** S ***X = 0,*** то есть ресурсы перераспределяются внутри проекта, дополнительных затрат нет. В данном примере ограничения затрат ***X– = –50, X+ = 50***. В реальных проектах ограничения и коэффициенты эффективности затрат b_i устанавливаются экспертами для каждой работы отдельно, в таблице появляются ещё три столбика-вектора: **b, X–, X+**.

Если мы запустим *Поиск решения*, в результате максимальных вложений в критические работы путь ***1=>4=>6=>7=>10*** сократится до 12, но другие пути удлинятся, и время выполнения проекта удлинится до 35,31. Очевидно, в ограничения *Поиска решения* надо вводить недопустимость удлинения других путей по сравнению с критическим. Но даже в нашей простой задаче это приводит большому количеству ограничений, так как надо предусмотреть все возможные пути. Поэтому ***предлагается принципиально новая технология расчёта, основанная на понятии опорных событий, а не опорных работ, как обычно, и вычислении времён наступления событий. Опорные события*** — это события, непосредственно предшествующие событию, время наступления которого вычисляется, и связанные с ним стрелками-работами. В таблице 1 представлены результаты расчётов, а на рисунке 1Б — соответствующий сетевой график. ***t(X) событий*** вычисляются в столбцах G, H, I, J. Если имеется только одно опорное событие, то время наступления события складыва-

Таблица 1

	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1				b	0,1					
2				X-	-50					
3				X+	50					
4										
5	Собы-	Опорные	Работа	t (X)	Макс t(X)				t_0	X
6	тия	события		работ	событий	t (X) событий			работ	
7	*1*		.1-2	12,08	0				10	-20,85
8			.1-3	8,60					8	-6,048
9			*.1-4*	*3,34*					6	26,575
10	2	1	.2-5	4,12	12,08				5	8,7497
11	3	1	.3-5	7,60	8,60				7	-6,048
12	*4*	1	*.4-6*	*7,65*	3,34				9	13,448
13	5	2, 3	.5-7	4,69	16,21	16,2	16,20		6	13,036
14			.5-8	6,94					6	-9,425
15	*6*	4	*.6-7*	*9,90*	10,99	10,99			8	-19,08
16			.6-8	5,58					4	-15,89
17			.6-9	5,06					5	-0,619
18	*7*	5, 6	*.7-10*	*6,26*	20,90	20,90	20,90		9	27,385
19	8	5, 6	.8-10	4,01	23,15	23,15	16,58		3	-10,15
20	9	6	.9-10	11,10	16,06	16,06			11	-1,079
21	*10*	7, 8 , 9			27,168	27,16	27,16	27,16		
22									∑**X**	0,00
23			*tкрит*	27,168						

ется из времени наступления опорного события и времени соответствующей работы $t_i(X)$. Если опорных событий несколько, то время наступления события вычисляется по всем опорным событиям в столбцах H, I, J, и максимум по этим ячейкам принимается за ***t(X) события*** в столбце G. Если для каких-либо событий опорных событий больше, то и количество соответствующих столбцов должно быть больше. Дополнительные ограничения: время критического пути, вычисленное по формуле (1), должно быть больше или равно времени наступления конечного события 10, вычисленных в последних трёх ячейках соответствующей строки (F23 ≥ H21, I21, J21). Окно *Поиска решения* представлено на рисунке 3, результаты расчётов — в таблице 1. Полученный результат: $\boldsymbol{t_{крит}}$ **=** 27,168**,** остальные пути, приводящие к событию 10, то есть к окончанию проекта, имеют ту же длину.

Пояснения: ***t(X) событий = Макс(t(X) событий (опорных) + t(X) работ)***. Здесь G10 = F7, G11 = F8, G12 = F9, H13 = G10 + F10, I13 = G11 + F11, G13 = МАКС(H13:J13), скопировать эту формулу до G21, H15 = G12 + F12, H18 = G13 + F13, I18 = = G15 + F15, H19 = G13 + F14, I18 = G15 + F16, H20 = = G15 + F17, H21 = G18 + F18, I21 = G19 + F19, J21 = = G20 + F20, F23 = F9 + F12 + F15 + F18.

В *Поиске решения* Целевая ячейка *tкрит* F23, минимизировать, *Изменяя ячейки* X (L7:L20), убрать галочку в «Сделать переменные без ограничений неотрицательными».

Для удобства расчётов столбцы $\boldsymbol{t_0}$ ***работ*** и ***X*** расположены справа, т. к. они не задействованы в расчётах ***Макс t(X) событий.***

Возможна другая постановка задачи: вычислить и минимизировать количество дополнительных ресурсов Σ***X*** для достижения заданной величины $\boldsymbol{t_{крит}}$**.** В этом случае целевой ячейкой *Поиска решения* становится Σ***X*** и устанавливается ограничение $\boldsymbol{t_{крит}}$**.**

Задав Σ***X*** = 10, можно оценить коэффициент эффективности дополнительных ресурсов ***b*** для проекта в целом (***b* = Δ**$\boldsymbol{t_{крит}}$ **/Σ*X***). В данном случае ***b = 0,03***, т. е. втрое меньше $\boldsymbol{b_i}$ для отдельной работы.

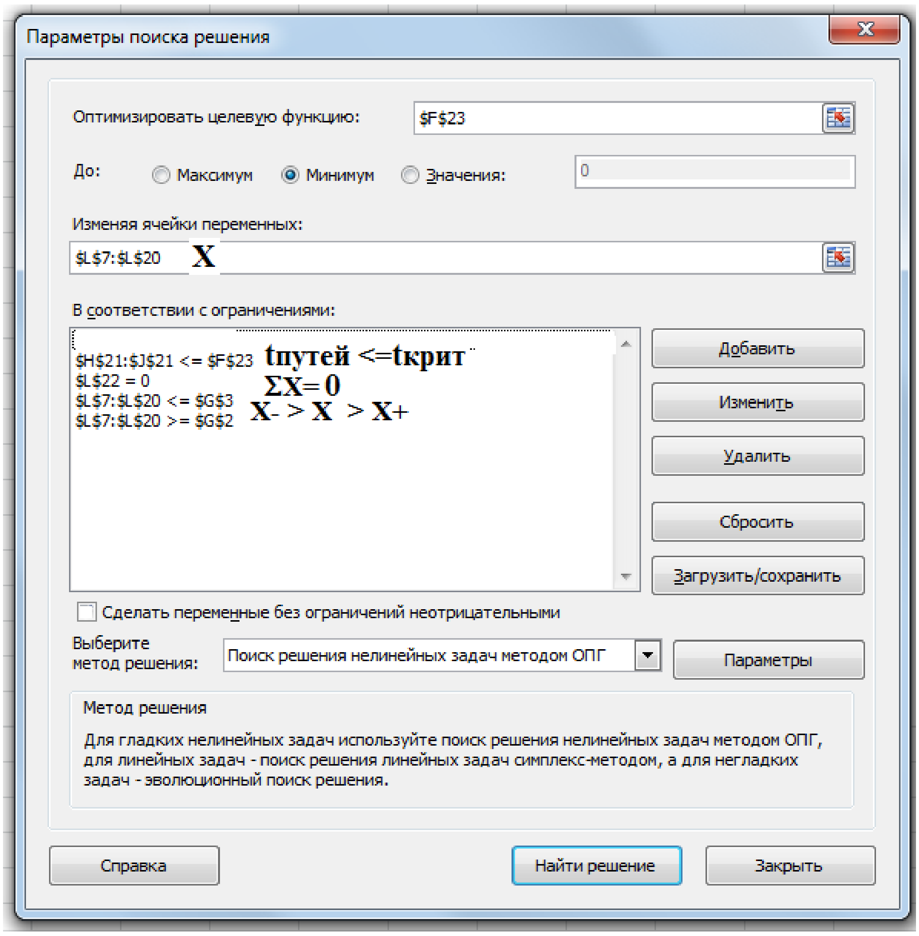

Рис. 3. Окно Поиска решения

Программа *Поиск решения* ищет условный экстремум нелинейной целевой функции с нелинейными ограничениями в многомерном пространстве, стартуя с исходного плана **X**. Это может привести к появлению различных планов **X**, в том числе неоптимальных, и зависимости результатов от начальных значений **X**, изменяя которые можно уменьшить $t_{крит}$.

Оптимизация по количеству работников

Оптимизация по количеству работников позволяет распределить работников по операциям таким образом, чтобы их количество на каждом временном интервале было минимальным. Её можно проводить как после оптимизации по времени, так и независимо от неё.

В данном случае события 2 и 6, 5 и 9 происходят почти одновременно. ***X*** — изменение количества работников на операциях, ***целое***. К таблице 1 в Excel добавляется таблица 2. В ней ***Интервал времени*** соответствует рисунку 4, ***Рабочих***$_0$ — исходное количество работников, ***Рабочих(X) = = Рабочих***$_0$ ***+ X***, ***∑рабочих*** формируется в соответствии с работами в интервалах времени рисунка 4. Столбец ***Работа*** скопирован для удобства. Целевая функция — минимальное количество работающих в любом из временных интервалов, указанных на рисунке 4 (после оптимизации по времени), здесь — минимум по столбцу O (***∑ рабочих***). Ограничено $t_{крит}$, в данном случае <=30. Изменяя это число, можно подобрать оптимальное количество работников и срок проекта $t_{крит}$, т. к. алгоритм расчёта и влияние X на $t_{крит}$ сохраняется.

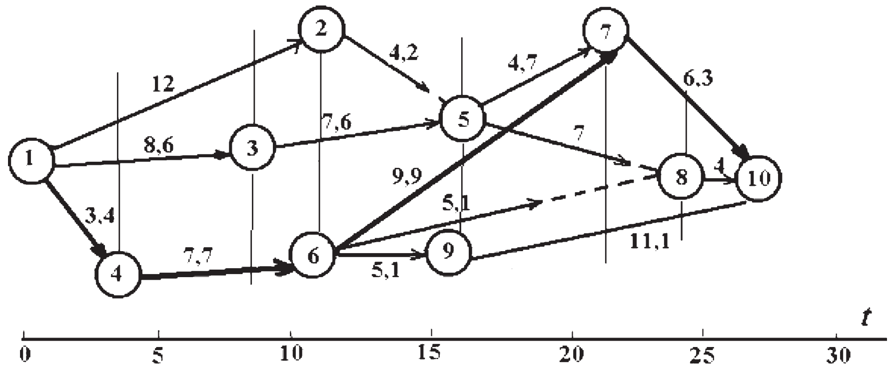

Рис. 4. Оптимизированный по времени сетевой график с временными интервалами

Таблица 2

	F	G			N	O	P	Q	R
1	b	1			Интервал времени	∑ рабочих	Рабочих$_0$	Рабочих (X)	Работа
2	X-	-2		7	.1-4	=Q7+Q8+Q9	10	8	.1-2
3	X+	2		8	.4-3	=Q7+Q8+Q12	8	10	.1-3
				9	.3-2,6	=Q7+Q11+Q12	6	8	***.1-4***
23	tкрит	30		10	.2,6-5,9	=Q7+Q11+Q15+ Q16+Q17	5	7	.2-5
24		<=		11	.5,9-7	=Q13+Q15+Q14+ Q16+Q20	7	6	.3-5
25		30		12	.7-8	=Q14+Q16+Q18+ Q20	9	9	***.4-6***
				13	.8-10	=Q18+Q19+Q20	6	5	.5-7
				14			6	5	.5-8
				15			8	6	***.6-7***
				16	Целевая	=МАКС(O7:O13)	4	2	.6-8
				17		(28)	5	6	.6-9
				18			9	11	***.7-10***
				19			3	5	.8-10
				20			11	9	.9-10

После оптимизации числа работников времена событий смещаются, временные интервалы на рисунке 4 становится другими (см. таблицу 3), и процедуру надо повторить. Данные таблицы 3 отсортированы по ***t события,*** $\sum$*рабочих* — после соответствующего события.

Таблица 3

Событие	t события	$\sum$ рабочих
1	0	26
4	4	27
3	6	23
2	12	28
6	13	
5	15	27
9	17	
8	22	25
7	23	27

Оценка времени выполнения оптимизированного проекта методом Монте-Карло

Время выполнения каждой работы и всего проекта — случайные величины. Поэтому обычно для каждой работы задаются три оценки: оптимистическая (***a***), наиболее вероятная (***m***), пессимистическая (***b***).

Среднюю продолжительность работы ***te*** вычисляют по формулам ***te = (a+4m+b)/6*** или ***te = = (2a + 3b)/5.***

Стандартное отклонение продолжительности операции вычисляют по формуле $\sigma_t = (b - a)/6$.

Дисперсию времени выполнения проекта можно оценить по формуле $\sigma^2_{tsum} = \Sigma\sigma^2_{ti}$, где σ^2_{ti} — дисперсии продолжительностей критических работ.

Если длительности работ не зависят друг от друга и подчиняются нормальному закону распределения, то можно вычислить вероятности различных сроков завершения проекта и вероятность превышения срока по сравнению с заданным (квантиль). Если сетевой график оптимизирован и длительности различных путей совпадают, то любой путь может оказаться критическим, и сложность расчётов резко возрастает. Кроме того, в экономике часто работает не закон нормального распределения (Гаусса), а закон распределения с «толстыми хвостами», например логнормальный. «Толстый хвост» означает, что вероятности аномальных длительностей работ (>3σ) достаточно велики.

Предлагаемая технология позволяет построить распределение вероятностей длительности проекта для любого распределения вероятных длительностей работ, полученного на основании экспертных оценок. Предположим, что на основе экспертных оценок построено распределение возможных длительностей работ, представленное на рисунке 4, и для каждой работы оценены масштабные коэффициенты «ширины» распределения S_i, аналоги стандартного отклонения, представленные в таблице 4. Для проведения расчётов удобен метод Монте-Карло: имитированные длительности всех работ $t_{имит}$ многократно варьируются случайным образом в соответствии с законом распределения и S_i :

$$t_{имит\ i} = t_i + G \cdot S_i$$

Таблица 4

C	D	E	F	G	H	I	J	К
События	Работа	S	$t_{имит}$	$t_{имит}$ событий				$t_{план}$
1	1-2	2	12,1					12,08
	1-3	2	8,8					8,60
	1-4	2	3,3					*3,34*
2	2-5	2	2,9	12,1				4,12
3	3-5	2	6,2	8,8				7,60
4	4-6	3	6,8	3,3				*7,65*
5	5-7	2	4,7	15,0	15,0	15,0		4,69
	5-8	2	7,1					6,94
6	6-7	2	10,1	10,1				*9,90*
	6-8	1	5,3					5,58
	6-9	1	5,1					5,06
7	7-10	2	5,3	20,2	19,7	20,2		*6,26*
8	8-10	1	4,4	22,2	22,2	15,4		4,01
9	9-10	3	11,1	15,2				11,10
10			**Т проекта**	**26,6**	25,5	26,6	26,3	
		t крит	25,5					

где t_i — плановая длительность работы, G — случайная величина, распределённая по закону, представленному на рис. 5.

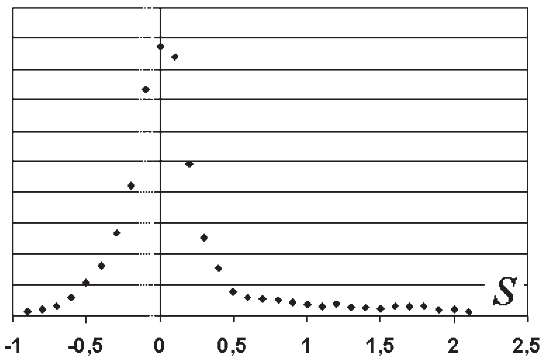

Рис. 5. Эмпирический закон распределения длительности работы

Затем вычисляются времена наступления событий, в том числе конечного *(**T проекта**)*, которое может отличаться от длительности старого критического пути $t_{крит}$. таблица 4 создаётся копированием таблицы 1, и алгоритм в столбцах G, H, I, J работает как «чёрный ящик», формируя ***T проекта*** по $t_{имит}$. Процедура повторяется многократно (1000 и более раз), получаемые значения ***T проекта*** сохраняются и по ним строится гистограмма частотных распределений (используя в Excel сервис *Анализ данных — Гистограмма*), а также, если надо, вычисляются среднее значение и стандартное отклонение (используя функции СРЗНАЧ и СТАНДОТКЛОН). Для генерации случайной величины G и $t_{имит}$, а также сохранения вычисленных значений ***T проекта*** использован программный модуль на языке Visual Basic. Процедура повторена 1000 раз. Результаты одного из циклов процедуры представлены в таблице 4, гистограмма вероятностей длительности проекта представлена на Рисунке 6. По частотам длительностей можно оценить, например, вероятность длительности проекта более 34 дней в 3,5 %, а более 35 дней — в 1,8 %. Гистограмма показывает, что при стохастическом характере длительностей работ время выполнения проекта увеличивается, причём может увеличиться очень существенно — на 10 дней.

В приложении 1 представлен программный модуль на языке Visual Basic for Applications (Excel) для имитации t_{imit} и сохранения ***T проекта,*** а в Приложении 2 — таблица, используемая программой после преобразования в 4 столбца. Нормальное распределение создаётся проще: в ячейке, например N9, помещается функция =НОРМ.СТ.ОБР(СЛЧИС()), в программе q=Range(“N9”) aa(j,3)=aa(j)+s*q '*Формирование* t_{imit} строки между ними и Next j удаляются.

Заключение

Использование сервиса Excel *Поиск решения* (*Solver*) позволяет эффективно оптимизировать сетевой график выполнения комплекса работ. Метод Монте-Карло позволяет оценить вероятности сроков окончания проекта при любом законе распределения длительностей работ. Данную работу можно использовать для планирования на производстве, а также в качестве лабораторной работы для обучения студентов.

Список литературы

1. Горошникова Т. А., Сунчалин А. М. Математические методы в управлении проектами: уч. пособие. М.: Финансовый университет, 2013. С. 46—94.

2. Исследование операций в экономике: уч. пособие / под ред. Н. Ш. Кремера. М.: Юрайт, 2013. С. 315—356. (URL: http://static.my-shop.ru/product/pdf/134/1332999.pdf)

3. Экономико-математическое моделирование / под ред. И. Н. Дрогобыцкого. М.: Экзамен, 2004. С. 347—354.

References

1. Goroshnikova T. A., Sunchalin A. M. *Matematicheskie metodi v upravlenii proektami* [Mathematical Methods at the Project Management]. Moscow, Financial University, 2013, p. 46—94.

2. *Issledovanie operatsii v ekonomike* [Investigation of operations in economics]. Edited by N. Sh. Kremer. Moscow, Jurait, 2013. p. 315—356.

3. *Ekonomiko-matematicheskoe modelirovanie* [Economy-Mathematical Modelling]. Edited by I. N. Drogobitski. Moscow, Ekzamen, 2004, p. 347—354.

Приложение 1

Программный модуль на языке Visual Basic for Applications (Excel)

```
Private Sub CommandButton1_Click()
Dim aa, dd, gg As Range       'Создание трёх массивов-диапазонов ячеек Excel
Set aa = Range("S30")         'Массив t работ, S, t_imit . В S30 число 12,1
Set dd = Range("F20")         ' Массив для сохранения tкрит, в любом месте
Set gg = Range("A20")         'Массив Таблица 5, в А20 число -0,9
nn = Range("N10")             'Количество имитаций в N10
For N = 1 To nn
For j = 1 To 14               ' Цикл по столбцам массива aa
q = Rnd()                     ' Случайное число в диапазоне 0…1
For k = 2 To 31               'Преобразование q в случайную
If gg(k, 2) >= q Then         'величину, распределение
 s =( gg(k) + gg(k-1))/2      ' которой табулировано в
Exit For                      'массиве gg
End If : Next k
aa(j, 3) = aa(j) + s * aa(j, 2)    'Формирование t_imit
Next j                         ' (Расчёт T проекта происходит в таблице Excel)
dd(N) = Range("V44")           ' Сохранение T проекта
Next N
End Sub
```

Приложение 2

Преобразование эмпирических частот y(t) в кумулятивное распределение ∑P(t), нормированное на 1. P(t) — плотности вероятностей, полученные делением y(t)/∑y(t), ∑P(t) — интеграл от P(t), формируется добавлением P(t) к предыдущему значению ∑P(t)

t	S	**P(t)**	**y(t)**		**t**	S	**P(t)**	**y(t)**
–0,9	0,0019	0,0019	1		0,7	0,9193	0,0106	5,6
–0,8	0,0057	0,0038	2		0,8	0,9296	0,0102	5,4
–0,7	0,0114	0,0057	3		0,9	0,9382	0,0085	4,5
–0,6	0,0228	0,0114	6		1	0,9458	0,0076	4
–0,5	0,0438	0,0209	11		1,1	0,9517	0,0059	3,1
–0,4	0,0762	0,0324	17		1,2	0,9588	0,0070	3,7
–0,3	0,1296	0,0533	28		1,3	0,9641	0,0053	2,8
–0,2	0,2134	0,0838	44		1,4	0,9689	0,0047	2,5
–0,1	0,3602	0,1467	77		1,5	0,9733	0,0043	2,3
0	0,5346	0,1744	91,5		1,6	0,9790	0,0057	3
0,1	0,7024	0,1677	88		1,7	0,9847	0,0057	3
0,2	0,8009	0,0985	51,7		1,8	0,9904	0,0057	3
0,3	0,8511	0,0501	26,3		1,9	0,9942	0,0038	2
0,4	0,8816	0,0304	16		2	0,9980	0,0038	2
0,5	0,8968	0,0152	8		2,1	1	0,0019	1
0,6	0,9086	0,0118	6,2				Сумма	524,6

Для цитирования: Катаргин Н. В. Оптимизация сетевого графика комплекса работ в Excel // Корпоративное управление и инновационное развитие экономики Севера: Вестник Научно-исследовательского центра корпоративного права, управления и венчурного инвестирования Сыктывкарского государственного университета. 2018. № 2. С. 129—136.

For citation: Katargin N. V. Optimization of Network Schedule of Set of Operations in Excel // Corporate governance and innovative economic development of the North: Bulletin of the Research Center of Corporate Law, Management and Venture Capital of Syktyvkar State University. 2018. № 2. P. 129—136.